

Primer examen final de Probabilidad I

2025-2 FES Acatlán

Sábado 31 de mayo

Instrucciones. Si está presentando examen final, resuelva cinco preguntas en total, al menos una de cada módulo. Si está presentando una reposición, resuelva las tres preguntas del módulo correspondiente. Redacte detalladamente la solución de su problema. Respuestas sin procedimiento serán consideradas incompletas. Los puntos indicados al final de cada pregunta/inciso sólo aplican en el caso de reposición. En el final todas las preguntas valen lo mismo.

Módulo 1

1. Un estudio de salud pública examinó los registros médicos de un grupo de 937 hombres que murieron en 1999 y descubrió que 210 de los hombres murieron por causas relacionadas con enfermedades cardíacas. Además, 312 de los 937 hombres tenían al menos un padre que sufrió de enfermedades cardíacas, y, de estos 312 hombres, 102 murieron por causas relacionadas con enfermedades cardíacas. Calcule la probabilidad de que un hombre seleccionado aleatoriamente de este grupo muriera por causas relacionadas con enfermedades cardíacas, dado que ninguno de sus padres sufrió de enfermedades cardíacas. [4pts]
2. Considere una variable aleatoria continua X cuya función de densidad de probabilidad $f_X(x)$ está definida de la siguiente manera:

$$f_X(x) = \begin{cases} c(x^2 + 2) & \text{si } 0 \leq x \leq 20 \\ 0 & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

donde c es una constante.

- a) Determine el valor de la constante c para que $f_X(x)$ sea una función de densidad de probabilidad válida. [1pt]
 - b) Encuentre la función de distribución acumulada $F_X(x)$ para esta variable aleatoria. [1pt]
 - c) Calcule la probabilidad del evento $\{X \geq 5\}$ [1pt]
3. Consideremos un grupo aleatorio de 8 personas. Para simplificar, asumiremos que el año tiene 365 días y que cada día es igualmente probable para un cumpleaños. Nos interesa calcular la probabilidad de que al menos dos personas en este grupo compartan el mismo día de cumpleaños.
 - a) Proponga un espacio muestral Ω equiprobable para este experimento. [1pt]
 - b) Considere el evento E : Ninguna persona en el grupo de 8 comparte cumpleaños con otra; es decir, las 8 personas tienen días de cumpleaños diferentes. Describa este evento en términos de una colección de elementos ω de Ω . [1pt]
 - c) Calcule la probabilidad de E y la probabilidad de que al menos dos personas en este grupo compartan el mismo día de cumpleaños. [1pt]

Módulo 2

1. Sea X una variable aleatoria con función de densidad dada por:

$$f_X(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x < 1, \\ 2 - x, & 1 \leq x \leq 2, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

- a) Grafique la función $f_X(x)$ y calcule la esperanza $\mathbb{E}[X]$. [2pts]
 - b) Calcule la varianza $\text{Var}(X)$. [1pt]
 - c) Calcule la mediana y la moda de la distribución. [1pt]
2. El tiempo de vida, en meses, de un componente electrónico se modela mediante una variable aleatoria con distribución exponencial de parámetro $\lambda = 1/5$. Es decir, la probabilidad de que el componente falle disminuye exponencialmente a medida que pasa el tiempo.
- Supón que sabes que un componente ha funcionado correctamente durante más de 2 meses, pero que su tiempo de vida total no excederá los 8 meses.
- Bajo esta condición, ¿cuál es la probabilidad de que el componente siga funcionando después de los 5 meses de uso? [3pts]
3. Una empresa de servicios públicos está promoviendo la instalación de medidores inteligentes de gas en una ciudad. Para cada visita a un hogar, la probabilidad de que el residente acepte la instalación del medidor es $p = 0.3$, y cada intento se considera independiente de los anteriores.
- Un técnico tiene como tarea instalar un medidor en cada hogar que acepte. Dado que no todos los hogares aceptan, el número de visitas necesarias antes de lograr una instalación exitosa puede modelarse mediante una variable aleatoria X con distribución geométrica (que cuenta el número total de visitas hasta obtener un “sí”).
- La empresa planea desplegar 60 técnicos, cada uno trabajando de forma independiente durante el día. [3pts]
- a) ¿Cuál es el número esperado de visitas que necesita cada técnico para lograr una instalación? ¿Cuál es la varianza de ese número? Puede usar sin demostrar que $\mathbb{E}(X^2) = \frac{2-p}{p^2}$. [1pts]
 - b) Sea $\bar{X}_{60}$ el promedio del número de visitas que necesitan los 60 técnicos. Usa el Teorema Central del Límite para aproximar la probabilidad de que el promedio de visitas exceda 4. [2pts]

Módulo 3

1. Sea X una variable aleatoria continua con distribución uniforme en el intervalo $(1, e)$, es decir, con función de densidad:

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{e-1}, & 1 < x < e, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Define la variable aleatoria $Y = \log X$, donde el logaritmo es natural.

- a) Encuentre la función de densidad de Y , pon especial atención en el soporte de la variable aleatoria Y . [2pts]
 - b) Grafique las funciones f_X y f_Y . [1pt]
2. Use funciones generadoras de momentos o funciones generadoras de probabilidad para demostrar que si $X_i \sim \text{Ber}(p)$ para $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ son variables independientes, entonces $Y = \sum_{i=1}^n X_i$ tiene distribución $\text{Bin}(n, p)$. Explique claramente los supuestos que use en cada paso. [4pts]
 3. Sea X una variable aleatoria con distribución Beta de parámetros $a = 2$, $b = 3$, cuya densidad está dada por:

$$f(x) = \frac{x(1-x)^2}{\mathcal{B}(2, 3)}, \quad 0 < x < 1,$$

donde $\mathcal{B}(3, 2) = \frac{\Gamma(3)\Gamma(2)}{\Gamma(5)} = \frac{2!1!}{4!}$.

Queremos simular valores de X utilizando el método de aceptación y rechazo. Para ello, consideramos como variable propuesta una $Y \sim \text{Uniforme}(0, 1)$, con densidad:

$$g(x) = 1, \quad 0 < x < 1.$$

a) Encuentre una constante $c > 0$ tal que:

$$\frac{f(x)}{c \cdot g(x)} \leq 1 \quad \text{para todo } x \in (0, 1).$$

b) Describa el algoritmo de aceptación y rechazo para simular valores con distribución Beta(2, 3) usando la propuesta uniforme. Explique cada paso y justifique cómo se utiliza la constante c encontrada.

	0	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990